مثال ۳. به عنوان کاربردی از قضیهٔ ۶ روابط زیرین را ثابت می‌کنیم

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0 \qquad (\text{۹ آ})$$

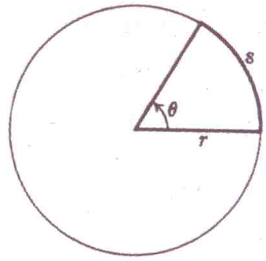
$$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad (\text{۹ ب})$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad (\text{۹ ج})$$

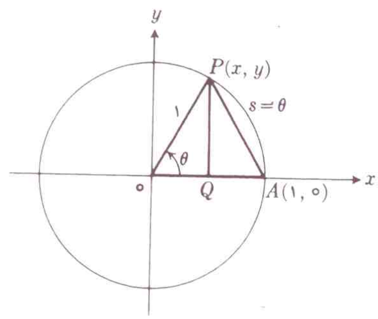
مشروط به آن که θ با رادیان اندازه گرفته شده باشد. [یادآوری می‌کنیم که وقتی رأس زاویه θ در مرکز دایره‌ای به شعاع r باشد و اضلاع زاویه بردایره قوسی به درازای s جدا کنند مقدار زاویه برحسب رادیان از دستور

$$\theta = s/r \qquad (\text{۱۰})$$

بدست می‌آید (شکل ۵.۲ آ).]



(آ)



(ب)

شکل ۵.۲

۵.۲ آ اندازهٔ یک زاویه به رادیان

۵.۲ ب اندازهٔ یک زاویه به رادیان در دایره وقتی که $r = 1$ و $s = \theta$

در شکل (۵.۲ ب)، O مرکز دایره‌ای به شعاع ۱ و θ اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ AOP برحسب رادیان است. توجه کنید که با این شرایط $s = \theta$، APQ مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که طول اضلاعش عبارت‌اند از

$$QP = \sin\theta \text{ ، } AQ = 1 - \cos\theta$$

از قضیهٔ فیثاغورس و توجه به‌این که $AP < \theta$ حاصل می‌شود:

$$\sin^2\theta + (1 - \cos\theta)^2 = (AP)^2 < \theta^2 \qquad (\text{۱۱})$$

هردوجملهٔ طرف چپ رابطهٔ (۱۱) مثبت هستند و در نتیجه هر یک کوچکتر است از مجموعشان، یعنی کوچکتر است از θ^2

$$\sin^2\theta < \theta^2 \qquad (\text{۱۲ آ})$$

$$(1 - \cos\theta)^2 < \theta^2 \qquad (\text{۱۲ ب})$$

نامساویهای (۱۲ آ) و (۱۲ ب) ایجاب می‌کنند که:

$$|\sin\theta| < |\theta| \qquad (\text{۱۳ آ})$$

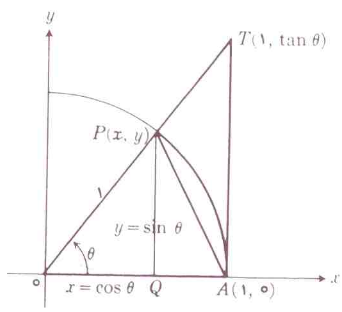
$$|1 - \cos\theta| < |\theta| \qquad (\text{۱۳ ب})$$

اگر ε عدد مثبتی باشد و h را مساوی ε انتخاب کنیم به ازای هر θ که در رابطهٔ $0 < |\theta| < h$ صدق کند خواهیم داشت:

$$|\sin\theta - 0| < \varepsilon$$

و

$$|1 - \cos\theta| < \varepsilon$$



شکل ۶.۲

مساحت $\Delta AOP <$ مساحت قطاع $AOP <$ مساحت ΔAOT

بنابراین

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0 \text{ و } \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$

برای اثبات رابطهٔ (۹ ج) فرض می‌کنیم که (در شکل ۶.۲) $0 < \theta < \pi/2$ باشد و مساحتهای ΔAOP و قطاع AOP و ΔAOT را با هم می‌سنجیم و توجه می‌کنیم که

$$\text{مساحت } \Delta AOP < \text{مساحت قطاع } AOP < \text{مساحت } \Delta AOT$$

اما نسبت مساحت قطاع AOP به مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ برابر است با نسبت طول قوس آن قطاع به محیط آن دایره[1]:

$$\frac{\text{مساحت قطاع } AOP}{\text{مساحت دایره}} = \frac{\text{کمان } AP}{\text{محیط دایره}}$$

بدین ترتیب

$$\frac{\text{مساحت قطاع } AOP}{\pi r^2} = \frac{r\theta}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi}$$

و بنابراین

$$\text{مساحت قطاع } AOP = \frac{1}{2} r^2\theta \qquad \text{(۱۴ آ)}$$

$$= \frac{1}{2}\theta \quad (r=1 \text{ وقتی که}) \qquad \text{(۱۴ ب)}$$

مثلث AOP دارای قاعدهٔ $OA = 1$ و ارتفاعی برابر با

$$y = PQ = \sin\theta$$

است و در نتیجه

$$\text{مساحت } \Delta AOP = \frac{1}{2}\sin\theta \qquad \text{(۱۵ آ)}$$

به همین ترتیب چون قاعدهٔ مثلث AOT برابر با $OA = 1$ و ارتفاع آن $AT = \tan\theta$ است:

$$\text{مساحت } \Delta AOT = \frac{1}{2}\tan\theta \qquad \text{(۱۵ ب)}$$

اما داشتیم

$$\text{مساحت } \Delta AOP < \text{مساحت قطاع } AOP < \text{مساحت } \Delta AOT$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta \text{ ، هرگاه } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \text{(۱۶)}$$

اگر سه‌جملهٔ نامساویهای (۱۶) را بر $1/2 \sin\theta$ تقسیم کنیم حاصل می‌شود

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \text{ ، هرگاه } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \text{(۱۷ آ)}$$

به خاطر می‌آوریم که $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ و $\cos(-\theta) = \cos\theta$. بدین ترتیب رابطهٔ (۱۷ آ) ایجاب می‌کند که

$$1 < \frac{-\theta}{\sin(-\theta)} < \frac{1}{\cos(-\theta)} \text{ ، هرگاه } 0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$$

و یا

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \text{ ، هرگاه } \frac{-\pi}{2} < \theta < 0 \qquad \text{(۱۷ ب)}$$

روابط (۱۷ آ) و (۱۷ ب) را ترکیب می‌کنیم تا رابطهٔ زیر نتیجه شود

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \text{ ، هرگاه } 0 < |\theta| < \frac{\pi}{2} \qquad \text{(۱۸)}$$

نامساوی (۱۸) دربارهٔ $\theta/\sin\theta$ است. برای آن که نامساوی را برحسب $\sin\theta/\theta$ بیان کنیم سه جملهٔ رابطه‌های (۱۸) را معکوس کرده جهت نامساویها را عوض می‌کنیم، زیرا که می‌دانیم هرگاه a و b هردو مثبت و $a > b$، آنگاه

[1] ۱. قبول می‌کنیم که مساحت و محیط دایره بشعاع r عبارت‌اند از $A = \pi r^2$ و $C = 2\pi r$. اثبات این روابط به حد مربوط می‌شوند ولی نه حد توابع مثلثاتی.