◀ حل برخی از تمرینات آنالیز حقیقی (کتاب فولند، فصل دوم) ▶

تمرین ۱ : فرض کنید $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ و $Y=f^{-1}(\mathbb{R})$. آنگاه f اندازه پذیر است اگر و تنها اگر $f^{-1}(\{-\infty\})\in\mathcal{M}$ و $f^{-1}(\{+\infty\})\in\mathcal{M}$ و f روی Y اندازه پذیر باشد.

اثبات : ابتدا فرض کنیم که $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ اندازه پذیر باشد یعنی برای هر $E\in\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ ، $f^{-1}(E)\in\mathcal{M}$.
دقت کنید که طبق تعریف ، $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}=\{E\subset\overline{\mathbb{R}}: E\cap\mathbb{R}\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$. در اینصورت

1. $\{-\infty\}\cap\mathbb{R}=\emptyset\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \{-\infty\}\in\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \Rightarrow f^{-1}(\{-\infty\})\in\mathcal{M}.$

2. $\{+\infty\}\cap\mathbb{R}=\emptyset\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \{+\infty\}\in\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \Rightarrow f^{-1}(\{+\infty\})\in\mathcal{M}.$

۳- چون $Y\subset X$ و f روی X اندازه پذیر است پس f روی Y نیز اندازه پذیر است.

برعکس : حال فرض کنیم که $f^{-1}(\{-\infty\}), f^{-1}(\{+\infty\})\in\mathcal{M}$ و f روی Y اندازه پذیر باشد. نشان میدهیم که f روی X نیز اندازه پذیر است. فرض کنید $E\in\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ پس $E\cap\mathbb{R}\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ و چون f روی Y اندازه پذیر است پس $f^{-1}(E\cap\mathbb{R})\in\mathcal{M}$. بنابراین $f^{-1}(E)=f^{-1}(E\cap\mathbb{R})\cup f^{-1}(E\cap\{-\infty\})\cup f^{-1}(E\cap\{+\infty\})$ به عنوان اجتماعی از سه عضو $\mathcal{M}$ ، عضوی از $\mathcal{M}$ است . لذا f روی X اندازه پذیر است . ■

تمرین ۳ : اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر روی X باشد آنگاه $\{x: \lim f_n(x) \text{ exists}\}\in\mathcal{M}$.

اثبات : طبق گزاره ۷.۲ ، هر دو تابع $g=\liminf f_n$ و $h=\limsup f_n$ توابعی اندازه پذیرند ولذا تابع $H=g-h$ نیز به عنوان تفاضل دو تابع اندازه پذیر ، تابعی اندازه پذیر است بنابراین

$$\{x: \lim f_n(x) \text{ exists}\}=H^{-1}(\{0\})\in\mathcal{M}. \blacksquare$$

تمرین ۸ : اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یکنوا باشد آنگاه f بورل اندازه پذیر است.

اثبات : چون $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یکنواست ، مجموعه نقاط ناپیوستگی اش حداکثر شمارا است . فرض کنیم $D=\{x_j\}_1^\infty$ مجموعه نقاط ناپیوستگی f باشد . چون $\mathbb{R}=(\mathbb{R}-D)\cup D$ طبق تمرین ۵ کافیست نشان دهیم که f روی هر دوی $\mathbb{R}-D$ و D بورل اندازه پذیر است.

۱- چون f روی $\mathbb{R}-D$ پیوسته است طبق نتیجه ۲.۲ ، f روی این مجموعه بورل اندازه پذیر است.

۲- چون f روی $\mathbb{R}$ یکنواست برای هر j ، $f^{-1}(\{x_j\})$ تک نقطه‌ای است ولذا $f^{-1}(\{x_j\})\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
بنابراین $f^{-1}(D)=\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(\{x_j\})\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. یعنی f روی D نیز بورل اندازه پذیر است. ■

تمرین ۹: فرض کنید $f:[0,1]\to[0,1]$ تابع کانتور باشد (بخش ۱.۵) و $g:[0,1]\to[0,2]$ با ضابطه $g(x)=f(x)+x$ تعریف شده باشد

الف) g به صورت دوسویی $[0,1]$ را به روی $[0,2]$ می‌نگارد و $h=g^{-1}$ از $[0,2]$ به $[0,1]$ پیوسته است.

ب) اگر C مجموعه کانتور باشد، $m(g(C))=1$.

ج) بنابر تمرین ۱.۲۹، $g(C)$ شامل یک مجموعه لبگ اندازه‌ناپذیر A است. قرار دهید $B=g^{-1}(A)$ آنگاه B لبگ اندازه‌پذیر است اما بورل اندازه‌پذیر نیست.

د) یک تابع لبگ اندازه‌پذیر F و یک تابع پیوسته G روی $\mathbb{R}$ وجود دارند بطوریکه $F\circ G$ لبگ اندازه‌پذیر نیست.

اثبات: الف): تابع کانتور f و نیز تابع $h(x)=x$ هر دو بازه $[0,1]$ را به صورت دوسویی به روی $[0,1]$ می‌نگارند بنابراین $g(x)=f(x)+x$ بازه $[0,1]$ را به صورت دوسویی به روی بازه $[0,2]$ می‌نگارد.

بعلاوه g بعنوان مجموع دو تابع پیوسته، تابعی پیوسته است بنابراین $h=g^{-1}$ نیز تابعی پیوسته است.
(لازم به ذکر است که چون g تابعی صعودی است، $h=g^{-1}$ نیز صعودی است).

ب): چون $m(C)=0$ و $m(f(C))=1$ پس $m(g(C))\leq m(f(C))+m(C)=1$ و از طرف دیگر $m(g(C))\geq m(f(C))=1$ بنابراین $m(g(C))=1$.

ج): بنابر تمرین ۱.۲۹، هر مجموعه با اندازه لبگ مثبت، شامل مجموعه‌ای لبگ اندازه‌ناپذیر است پس $g(C)$ نیز شامل یک مجموعه لبگ اندازه‌ناپذیر مانند A است. قرار دهید $B=g^{-1}(A)$.

اولاً چون g یک به یک است و $A\subseteq g(C)$ پس $B=g^{-1}(A)\subseteq C$ و لذا B به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعه با اندازه لبگ صفر C، مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر است.

اما (فرض خلف) اگر B بورل اندازه‌پذیر باشد $A=g(B)=h^{-1}(B)$ بعنوان تصویر معکوس مجموعه بورل اندازه‌پذیر B تحت تابع پیوسته h، مجموعه‌ای بورل اندازه‌پذیر خواهد بود و این تناقضی آشکار است زیرا A حتی لبگ اندازه‌پذیر هم نیست.

د): روی $\mathbb{R}$ توابع F و G را به صورت زیر در نظر بگیرید

$F(x)=\chi_B(x)=\begin{cases}1 & x\in B\\ 0 & x\notin B\end{cases}$ و $G(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ h(x) & x\in[0,2]\\ 1 & x>2\end{cases}$. چون B لبگ اندازه‌پذیر است (قسمت ج) پس F تابعی لبگ اندازه‌پذیر است

تابع G نیز تابعی پیوسته است اما تابع $F\circ G$ لبگ اندازه‌پذیر نیست زیرا

$$(F\circ G)^{-1}(\{1\})=G^{-1}(F^{-1}(\{1\}))=G^{-1}(B)=h^{-1}(g^{-1}(A))=g(g^{-1}(A))=A$$

و A لبگ اندازه‌پذیر نیست. ■

تمرین ۱۵: اگر μ اندازه‌ای کامل باشد

الف) اگر f اندازه‌پذیر و $f=g$ a.e آنگاه g نیز اندازه‌پذیر است.

ب) اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، f_n اندازه‌پذیر باشد و $f_n\to f$ a.e آنگاه f اندازه‌پذیر است.

ج) اگر μ کامل نباشد الف و ب در حالت کلی درست نیستند.

اثبات: الف) دو حالت درنظر می‌گیریم

حالت اول: فرض کنید $f,g:X\to\mathbb{R}$ توابع حقیقی باشند که $f=g$ a.e و f اندازه‌پذیر باشد

قرار دهید $E=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ دراینصورت $\mu(X\setminus E)=0$ و برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$،

یک مجموعه $N\subseteq X\setminus E$ موجود است که $\{x: g(x)>\alpha\}=\{x: f(x)>\alpha\}\cup N$

چون f اندازه‌پذیر است پس $\{x: f(x)>\alpha\}\in M$ و چون μ اندازه‌ای کامل است پس $N\in M$

بنابراین برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$، $\{x: g(x)>\alpha\}\in M$ ولذا g اندازه‌پذیر است.

حالت دوم: فرض کنید $f,g:X\to\mathbb{C}$ دو تابع مختلط باشند که $f=g$ a.e و f اندازه‌پذیر باشد

چون هر دو قسمت حقیقی و موهومی f اندازه‌پذیرند، طبق حالت اول، هر دو قسمت حقیقی و موهومی g اندازه‌پذیرند و لذا g اندازه‌پذیر است.

ب): قرار دهید $E=\{x: f_n(x)\to f(x)\}$ دراینصورت $\mu(X\setminus E)=0$. طبق ۲.۷، f روی E اندازه‌پذیر است و طبق مطلب زیر f روی $X\setminus E$ نیز اندازه‌پذیر است پس f روی X اندازه‌پذیر است.

نکته: اگر $\mu(E)=0$ و $f:E\to\mathbb{C}$ هر تابع مختلط دلخواهی باشد آنگاه f اندازه‌پذیر است.

اثبات نکته: اگر $f=f_1+if_2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ آنگاه $f_1^{-1}((\alpha,\infty))$ و $f_2^{-1}((\alpha,\infty))$ هر دو به عنوان زیرمجموعه‌هایی از مجموعه با اندازه صفر E، مجموعه‌هایی اندازه‌پذیرند (چون μ اندازه‌ای کامل است) ولذا هر دوی f_1 و f_2 توابعی اندازه‌پذیرند و بنابراین f نیز اندازه‌پذیر است.

ج): روی مجموعه $X=\{0,1,2,3\}$، σ-جبر M و اندازه μ را به صورت زیر درنظر بگیرید

$$M=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{1,2,3\},\{0,2,3\},\{2,3\},\{0,1\},X\}$$

$$\mu(\{0\})=\mu(\{0,2,3\})=\mu(\{2,3\})=\mu(\emptyset)=0 \quad \text{و} \quad \mu(\{1\})=\mu(\{1,2,3\})=\mu(\{0,1\})=\mu(X)=1$$

حال توابع $f,g:X\to\mathbb{R}$ را به صورت $f(x)=1$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 2 & x=0\\ 3 & x=2\\ 4 & x=3\end{cases}$ درنظر بگیرید.

آنگاه f تابعی اندازه‌پذیر است و $\mu(\{x: g(x)\neq f(x)\})=\mu(\{0,2,3\})=0$ پس $f=g$ a.e

امّا g اندازه‌پذیر نیست زیرا $g^{-1}((3.5,\infty))=\{3\}\notin M$. ■

تمرین ۱۴ : اگر $f \in L^+$ باشد برای هر $E \in \mathcal{M}$ قرار دهید $\lambda(E) = \int_E f\,d\mu$. آنگاه λ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ است و برای هر $g \in L^+$ ، $\int g\,d\lambda = \int fg\,d\mu$. (ابتدا فرض کنید g ساده است)

اثبات : $\lambda(\emptyset) = 0$ بدیهی است . فرض کنید $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ گردایه‌ای از عناصر مجزای $\mathcal{M}$ باشد که $\bigcup_1^{\infty} E_j = E$

دراینصورت $\chi_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} f$ و بنابراین

$$\lambda(E) = \int_X \chi_E f\,d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_j} f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)$$

لذا λ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ است. برای اثبات مطلب بعدی :

۱- ابتدا فرض کنید که $g = \chi_E$ یک تابع مشخصه باشد آنگاه طبق تعریف λ :

$$\int g\,d\lambda = \lambda(E) = \int_E f\,d\mu = \int f\chi_E\,d\mu = \int fg\,d\mu$$

۲- حال فرض کنید که $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ یک تابع ساده باشد (برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $(A_i = g^{-1}(\{\alpha_i\})$)

دراینصورت طبق ۱ ،

$$\int g\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \chi_{A_i}\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f\chi_{A_i}\,d\mu = \int f \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}\,d\mu = \int fg\,d\mu$$

۳- سرانجام فرض کنید که $g \in L^+$. دراینصورت یک دنباله مانند $\{s_n\}$ از توابع ساده موجود است که $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$ و برای هر n ، $s_n(x) \to f(x)$

بنابراین طبق ۲ و قضیه همگرایی یکنوای لبگ (LMCT) ،

$$\int g\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int s_n\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int s_n f\,d\mu = \int gf\,d\mu . \blacksquare$$

تمرین ۱۵ : اگر $\{f_n\} \subset L^+$ و f_n نقطه به نقطه به f نزول کند و $\int f_k < \infty$ برای یک k ، آنگاه $\int f = \lim \int f_n$

اثبات : در صورت لزوم با نادیده گرفتن چند تابع اول می توان فرض کرد که $k=1$ یعنی $\int f_1 < \infty$.

حال برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $g_n = f_1 - f_n$. دراینصورت چون $f_n \downarrow f$ پس $g_n \uparrow f_1 - f$

و لذا طبق قضیه همگرایی یکنوای لبگ ،

$$\int f_1 - \lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int (f_1 - f_n) = \lim_{n\to\infty} \int g_n = \int f_1 - \int f$$

چون $\int f_1 < \infty$ می توان آنرا از طرفین تساوی حذف کرد و بنابراین خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f . \blacksquare$$

تمرین ۱۶: اگر $f \in L^+$ و $\int f < \infty$ باشد آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک $E \in \mathcal{M}$ هست که $\mu(E) < \infty$ و

$$\int_E f > \int f - \varepsilon$$

اثبات: دنباله‌ای مانند $\{\varphi_n\}$ از توابع ساده مثبت روی X هست که $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq f$ و برای هر $x \in X$، $\varphi_n(x) \to f(x)$. لذا بنابر قضیه همگرایی یکنوای لبگ، $\int \varphi_n \to \int f$

حال چون $\int f < \infty$، برای هر $\varepsilon > 0$ یک $n \in \mathbb{N}$ هست که $\int f - \varepsilon < \int \varphi_n$

فرض کنید $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ نمایش استاندارد φ_n باشد و قرار دهید $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$

دراینصورت $\mu(E) < \infty$ و

$$\int f - \varepsilon < \int \varphi_n = \int_E \varphi_n < \int_E f. \blacksquare$$

تمرین ۱۷: می‌توان لم فاتو را بدون استفاده از قضیه همگرایی یکنوای لبگ اثبات کرد. نشان دهید که دراینصورت می‌توان قضیه همگرایی یکنوای لبگ را به عنوان نتیجه‌ای از لم فاتو اثبات کرد.

اثبات: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای در L^+ باشد که $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ و برای هر x، $f_n(x) \to f(x)$

دراینصورت اولاً طبق لم فاتو $\int f \leq \liminf \int f_n$. ①

ازطرفی برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار دهید $g_n = f - f_n$ آنگاه $g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq 0$ و

$g_n \to 0$ پس دوباره طبق لم فاتو، $0 \leq \liminf \int g_n$

اما $\liminf \int g_n = \int f - \limsup \int f_n$ پس $\int f \geq \limsup \int f_n$ ②

از ① و ② نتیجه مطلوب به صورت $\int f = \lim \int f_n$ به دست می‌آید. $\blacksquare$

تمرین ۲۰: اگر $f_n, g_n, f, g \in L^1(\mu)$، $f_n \to f$ و $g_n \to g$، $|f_n| \leq g_n$ و $\int g_n \to \int g$ آنگاه $\int f_n \to \int f$.

اثبات: برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $h_n = 2g_n - |f_n - f|$ آنگاه $\{h_n\}$ دنباله‌ای در L^+ است و $h_n \to 2g$. لذا طبق لم فاتو،

$$2\int g = \int \liminf h_n \leq \liminf \int h_n = \liminf \left(\int 2g_n - |f_n - f|\right) = 2\int g - \limsup \int |f_n - f|$$

چون $g \in L^1$ پس $\int g < \infty$ ولذا می‌توان آنرا ازطرفین حذف کرد ولذا $\limsup \int |f_n - f| \leq 0$.

ازطرفی بدیهی است که $\liminf \int |f_n - f| \geq 0$ پس $\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f| = 0$ و بنابراین

$$\int f_n \to \int f. \blacksquare$$

تمرین ۲۱: فرض کنید $f_n, f \in L^1$ و $f_n \to f$ a.e آنگاه $\int |f_n - f| \to 0$ اگر و تنها اگر $\int |f_n| \to \int |f|$.

اثبات: ابتدا فرض کنید که $\int |f_n - f| \to 0$ در اینصورت طبق گزاره ۲.۲۲:

$$\left|\int |f_n| - \int |f|\right| \leq \int \big||f_n| - |f|\big| \leq \int |f_n - f| \to 0 \Rightarrow \int |f_n| \to \int |f|.$$

برعکس: حال فرض کنید که $\int |f_n| \to \int |f|$.

برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $F_n = |f_n - f|$ و $G_n = |f_n| + |f|$ در اینصورت $F_n \xrightarrow{a.e} 0$ و $G_n \xrightarrow{a.e} 2|f|$. از طرفی چون $|F_n| = |f_n - f| \leq |f_n| + |f| = G_n$ و $\int |f_n| \to \int |f|$ پس $\int G_n = \int |f_n| + |f| \to \int 2|f|$ لذا شرایط تمرین ۲۰ برقرار است و بنابراین $\int |f_n - f| = \int F_n \to 0$. ■

تمرین ۳۸: فرض کنید $f_n \to f$ در اندازه و $g_n \to g$ در اندازه

الف) $f_n + g_n \to f + g$ در اندازه.

ب) اگر $\mu(X) < \infty$ آنگاه $f_n g_n \to fg$ در اندازه اما نه لزوماً اگر $\mu(X) = \infty$.

اثبات: الف) چون $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$ پس برای هر $\varepsilon > 0$:

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \& \quad \mu(\{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$ چون،

$$\{x : |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

پس اندازه مجموعه سمت چپ نیز به صفر میل می‌کند و بنابراین $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

ب) چون $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$ بنابه قضیه ۲.۳۰، زیردنباله‌های $\{f_{n_k}\}$ و $\{g_{n_k}\}$ موجودند که $f_{n_k} \xrightarrow{a.e} f$ و $g_{n_k} \xrightarrow{a.e} g$ ولذا $f_{n_k} g_{n_k} \xrightarrow{a.e} fg$. حال چون $\mu(X) < \infty$ طبق قضیه اگروف $f_{n_k} g_{n_k} \xrightarrow{al.\ uni} fg$ تقریباً بطور یکنواخت و لذا طبق تمرین ۳۹، $f_{n_k} g_{n_k} \xrightarrow{\mu} fg$.

چون $\{f_n g_n\}$ در اندازه کشی است و زیردنباله‌ای از آن در اندازه به fg همگراست پس کل دنباله در اندازه به fg همگراست. (نکات زیر را ببینید)

نکته ۱: اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای کشی باشد و زیردنباله‌ای از آن به تابعی مانند f نقطه به نقطه همگرا باشد آنگاه کل $\{f_n\}$ به تابع f همگراست.

نکته ۲: اگر $\{f_n\}$ در اندازه کشی باشد و زیردنباله‌ای از آن به تابعی مانند f در اندازه همگرا باشد آنگاه کل $\{f_n\}$ در اندازه به تابع f همگراست. ■