پاسخ پرسش‌های آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، ترم دوم سال تحصیلی ۹۵-۹۴

۱. تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲\sin y+y^۲\sin x}{x^۲+y^۲+|x|\,|y|} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ را بیابید.

ج) وجود مشتق سویی f در مبدا مختصات و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathbf{j}$ را بررسی کنید.

د) با محاسبه‌ی $\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$، مشتق‌پذیری f در $(۰,۰)$ را با ذکر دلیل بررسی کنید. (۳۰ نمره)

حل. الف) نشان می‌دهیم $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=f(۰,۰)=۰$. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم برای $\epsilon>۰$، عدد $\delta>۰$ وجود دارد که

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^۲,\quad \|(x,y)-(۰,۰)\|=\sqrt{x^۲+y^۲}<\delta \ \Rightarrow\ |f(x,y)-f(۰,۰)|<\epsilon$$

با توجه به اینکه برای هر $(x,y)\neq(۰,۰)$ داریم

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(۰,۰)|=|\frac{x^۲\sin y+y^۲\sin x}{x^۲+y^۲+|x||y|}| &\leq \frac{x^۲}{x^۲+y^۲+|x||y|}|\sin y|+\frac{y^۲}{x^۲+y^۲+|x||y|}|\sin x|\\ &\leq |\sin y|+|\sin x|\leq|y|+|x|\leq ۲\sqrt{x^۲+y^۲}\end{aligned}$$

کافی است برای $\epsilon>۰$، عدد $\delta>۰$ را با شرط $\delta\leq\frac{\epsilon}{۲}$ اختیار کنیم. در این صورت صحت استلزام فوق به راحتی تحقیق می‌گردد.

پس f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) با استفاده از تعریف مشتقات جزئی،

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) &= \lim_{x\to۰}\frac{f(x,۰)-f(۰,۰)}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{\frac{۰}{x^۲}-۰}{x}=۰\\ \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) &= \lim_{y\to۰}\frac{f(۰,y)-f(۰,۰)}{y}=\lim_{y\to۰}\frac{\frac{۰}{y^۲}-۰}{y}=۰\end{aligned}$$

ج) مشتق سویی f در مبدا و در سوی برای یکه‌ی $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathbf{j}$، بنابه تعریف، عبارت است از

$$\begin{aligned}
D_u f(۰,۰) &= \lim_{t\to ۰} \frac{f(۰ + t\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰ + t\frac{\sqrt{۲}}{۲}) - f(۰,۰)}{t} \\
&= \lim_{t\to ۰} \frac{\dfrac{\frac{t^۲}{۲}\sin(t\frac{\sqrt{۲}}{۲}) + \frac{t^۲}{۲}\sin(t\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{\frac{t^۲}{۲} + \frac{t^۲}{۲} + |t\frac{\sqrt{۲}}{۲}||t\frac{\sqrt{۲}}{۲}|}}{t} \\
&= \lim_{t\to ۰} \frac{\frac{۲}{۳}\sin(\frac{\sqrt{۲}}{۲}t)}{t} = \frac{\sqrt{۲}}{۳}
\end{aligned}$$

د) با توجه به محاسبات قسمت (ب)، $\nabla f(۰,۰) = ۰\mathbf{i} + ۰\mathbf{j}$ و در نتیجه $\nabla f(۰,۰)\cdot \mathbf{u} = ۰$. با توجه به قسمت (ج)،

$$D_u f(۰,۰) \neq \nabla f(۰,۰)\cdot \mathbf{u}$$

در نتیجه، تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

---

۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله‌ی $f(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \frac{x}{y}) = ۱$ تعریف شود، نشان دهید z در معادله‌ی دیفرانسیل $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ صدق می‌کند. (۱۵ نمره)

حل. (راه حل اول) قرار می‌دهیم $u(x,y,z) = \frac{z}{x}$، $v(x,y,z) = \frac{z}{y}$ و $w(x,y,z) = \frac{x}{y}$ و

$$g(x,y,z) = f\big(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\big)$$

در این صورت، بنابه فرض مسئله، z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله‌ی $g(x,y,z) = ۱$ داده شده است. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{f_u\frac{\partial u}{\partial x} + f_v\frac{\partial v}{\partial x} + f_w\frac{\partial w}{\partial x}}{f_u\frac{\partial u}{\partial z} + f_v\frac{\partial v}{\partial z} + f_w\frac{\partial w}{\partial z}} = -\frac{-f_u\frac{z}{x^۲} + f_w\frac{۱}{y}}{f_u\frac{۱}{x} + f_v\frac{۱}{y}} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{f_u\frac{\partial u}{\partial y} + f_v\frac{\partial v}{\partial y} + f_w\frac{\partial w}{\partial y}}{f_u\frac{\partial u}{\partial z} + f_v\frac{\partial v}{\partial z} + f_w\frac{\partial w}{\partial z}} = -\frac{-f_v\frac{z}{y^۲} - f_w\frac{x}{y^۲}}{f_u\frac{۱}{x} + f_v\frac{۱}{y}}
\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} &= x\Big(-\frac{-f_u\frac{z}{x^۲}+f_w\frac{۱}{y}}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}}\Big)+y\Big(-\frac{-f_v\frac{z}{y^۲}-f_w\frac{x}{y^۲}}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}}\Big) \\ &= \frac{\frac{z}{x}f_u-\frac{x}{y}f_w}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}}+\frac{\frac{z}{y}f_v+\frac{x}{y}f_w}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}} \\ &= z\Big(\frac{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v}{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v}\Big)=z \end{aligned}$$

(راه حل دوم) بنابر فرض، تابعی مشتق‌پذیر چون $z(x,y)$ وجود دارد که برای هر (x,y) در معادله‌ی $f\big(\frac{z(x,y)}{x},\frac{z(x,y)}{y},\frac{x}{y}\big)=۱$ صدق می‌کند. با قرار دادن $u(x,y)=\frac{z(x,y)}{x}$، $v(x,y)=\frac{z(x,y)}{y}$ و $w(x,y)=\frac{x}{y}$، برای هر (x,y) داریم

$$f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=۱$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=۰ \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial y}f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=۰$$

و از آنجا

$$\begin{aligned} ۰ &= f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}+f_w\frac{\partial w}{\partial x}=f_u\Big(\frac{۱}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^۲}\Big)+f_v\Big(\frac{۱}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+f_w\Big(\frac{۱}{y}\Big) \\ ۰ &= f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}+f_w\frac{\partial w}{\partial y}=f_u\Big(\frac{۱}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\Big)+f_v\Big(\frac{۱}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^۲}\Big)-f_w\Big(\frac{x}{y^۲}\Big) \end{aligned}$$

با حل دو معادله‌ی فوق بر حسب $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\frac{z}{x^۲}f_u-\frac{۱}{y}f_w}{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\frac{z}{y^۲}f_v+\frac{x}{y^۲}f_w}{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\frac{z}{x}f_u-\frac{x}{y}f_w}{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v}+\frac{\frac{z}{y}f_v+\frac{x}{y}f_w}{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v} \\ &= \frac{\frac{z}{x}f_u+\frac{z}{y}f_v}{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v}=z \end{aligned}$$

---

۳. رویه‌ی S به معادله‌ی $z=e^{(x^2+y^2)}$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید S یک رویه‌ی دوار است.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در نقطه‌ی $P_0=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},e)$ را بنویسید.

ج) معادله‌ی خطی را بنویسید که در نقطه‌ی P_0 بر خم C حاصل تلاقی رویه‌ی S و صفحه‌ی $z=e$ مماس است. (۲۵ نمره)

حل. الف) (راه حل اول) فرض کنیم C_0 خم حاصل از برخورد رویه‌ی S با صفحه‌ی yoz باشد. در این صورت C_0 خمی به معادله‌ی $z=e^{y^2}$ یا به معادله‌ی $f(y,z)=e^{y^2}-z=0$ می‌باشد. رویه‌ی حاصل از دوران این خم حول محور z، رویه‌ای به معادله‌ی

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=e^{(x^2+y^2)}-z=0$$

خواهد بود که همان رویه‌ی داده شده در صورت سئوال است. پس رویه‌ی مورد نظر حاصل دوران خم فوق حول محور z است.

(راه حل دوم) صفحه‌ی $z=k$ (به شرط $k>1$) رویه‌ی فوق را در دایره‌ی $x^2+y^2=\ln k$ قطع می‌کند. با توجه به اینکه با تغییر $k>1$ مراکز دایره‌های حاصل همه بر محور z قرار دارند، پس رویه‌ی فوق رویه‌ای دوار حول محور z است.

ب) اگر قرار دهیم $g(x,y,z):=e^{(x^2+y^2)}-z$ آنگاه رویه‌ی S دارای معادله‌ی $g(x,y,z)=0$ است و از آنجا بردار ∇g در هر نقطه از این رویه بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر رویه در آن نقطه خواهد بود. داریم

$$\nabla g=(2xe^{(x^2+y^2)})\mathbf{i}+(2ye^{(x^2+y^2)})\mathbf{j}+(-1)\mathbf{k}$$

در نتیجه در نقطه‌ی $P_0=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},e)$ ،

$$\nabla g(P_0)=\sqrt{2}e\mathbf{i}+\sqrt{2}e\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

و در نتیجه معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر S در P_0 عبارت است از $\sqrt{2}e(x-\frac{\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}e(y-\frac{\sqrt{2}}{2})-(z-e)=0$

ج) (راه حل اول) خط مماس بر خم C در نقطه‌ی P_0، در صفحه مماس بر رویه در این نقطه (صفحه به دست آمده در قسمت قبل) قرار دارد. از طرف دیگر، این خط در داخل صفحه‌ی $z=e$ نیز قرار گرفته است. بنابر این حاصل‌ضرب برداری نرمال‌های دو صفحه‌ی فوق را می‌توانیم به عنوان بردار هادی این خط انتخاب کنیم. با توجه به اینکه یک بردار نرمال صفحه‌ی $z=e$ بردار $\mathbf{k}$ است، بردار هادی خط مورد نظر عبارت است از

$$\nabla g(P_0)\times\mathbf{k}=\left(\sqrt{2}e\mathbf{i}+\sqrt{2}e\mathbf{j}-\mathbf{k}\right)\times\mathbf{k}=-\sqrt{2}e\mathbf{j}+\sqrt{2}e\mathbf{i}=\sqrt{2}e\mathbf{i}-\sqrt{2}e\mathbf{j}$$

پس معادلات پارامتری این خط به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}et+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\sqrt{2}et+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=e \end{cases}$$

(راه حل دوم) ابتدا معادلات پارامتری خم حاصل از برخورد رویه‌ی S و صفحه‌ی $z=e$ را به دست می‌آوریم.

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y,x)\in S \text{ و } z=e\}=\{(x,y,e)\in\mathbb{R}^3 \mid e^{(x^2+y^2)}=e \text{ یا } x^2+y^2=1\}$$

بنابر این C دارای معادلات پارامتری $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=e \end{cases}$، $t\in[0,2\pi]$، است. نقطه‌ی $P_0=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},e)$ نظیر $t=\frac{\pi}{4}$ است. اگر قرار دهیم $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+e\mathbf{k}$ آنگاه $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4})=-\sin(\frac{\pi}{4})\mathbf{i}+\cos(\frac{\pi}{4})\mathbf{j}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ بردار هادی خط مماس بر این خم در نقطه‌ی نظیر $t=\frac{\pi}{4}$ خواهد بود. در نتیجه معادلات پارامتری خط مورد نظر عبارتند از

$$L:\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=e \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که در حالت اخیر بردار هادی خط به دست آمده، ضریبی از بردار هادی به دست آمده در روش قبلی است.